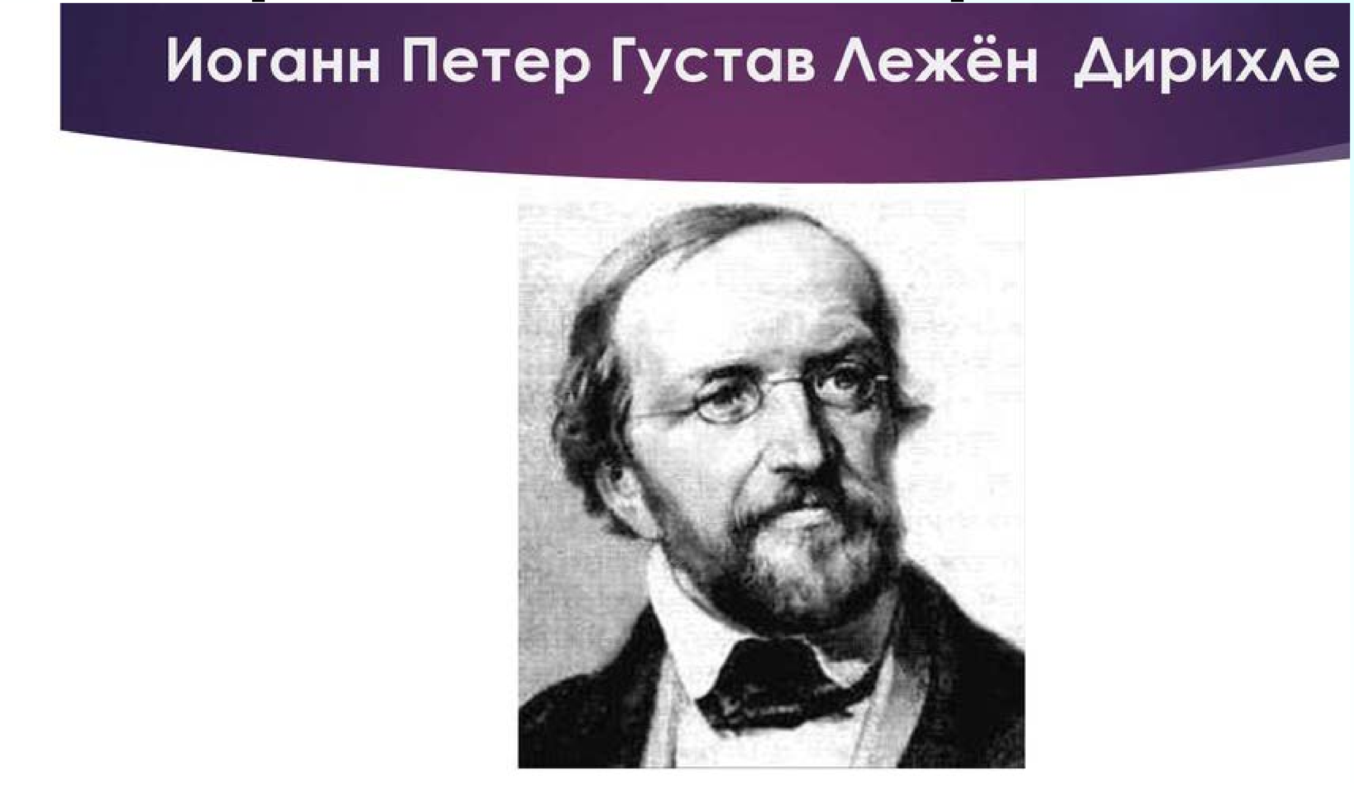
Принцип Дирихле



Дирихле Петер Густав Лежен (13.02.1805-05.05. 1859) - немецкий математик.
Родился в Дюрене.
В 1822-1827гг. был домашним учителем в Париже. Входил в кружок молодых ученых, которые группировались вокруг Ж. Фурье.
В 1827 занял место доцента в Бреславе; с 1829 работал в Берлине.
В 1831-1855гг.- профессор Берлинского университета,
после смерти К.Гаусса (1855г.) - Гёттингенского университета.

По традиции принцип Дирихле почему-то объясняют на примере кроликов в клетках: если общее число кроликов больше числа клеток, в одной из клеток наверняка сидит более одного кролика. Этим принципом в неявном виде пользовался, например, Ферма в XVII веке; но широко применяться в доказательствах он стал лишь с прошлого века! Несмотря на свою простоту, это рассуждение оказалось чрезвычайно плодотворным.

Наиболее часто **принцип Дирихле** формулируется в одной из следующих форм:

Если пять “кроликов” помещены в четыре “клетки”, то в одной из клеток находятся не менее двух “кроликов”; или, другими словами, нельзя посадить пять “кроликов” в четыре клетки так, чтобы в каждой клетке находилось не более одного “кролика”.

В более общей форме этот принцип выглядит так:

Если $(n+1)$ “кролик” помещен в n “клетках”, то имеется “клетка”, в которой находятся не менее двух “кроликов”.

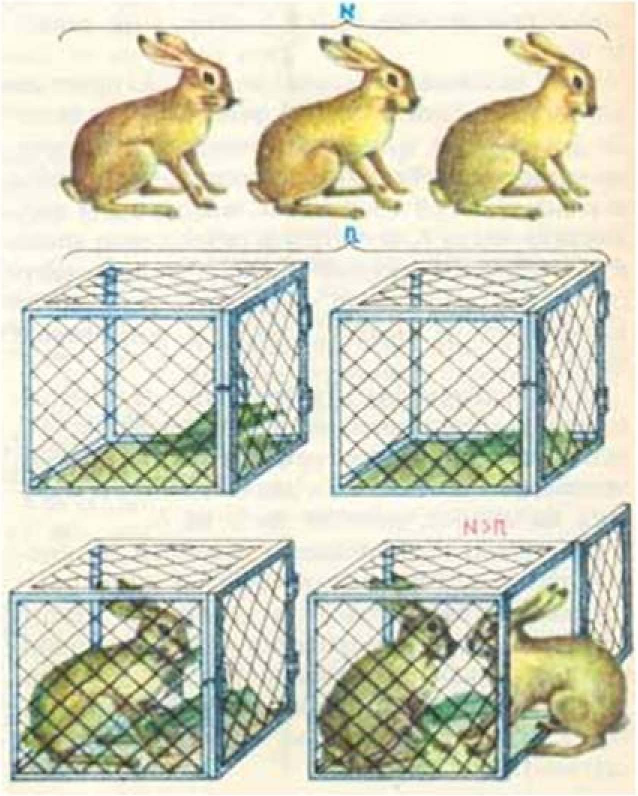
Принцип Дирихле

Если в n клеткахсидит m зайцев,

причем m > n,

то хотя бы в одной клетке сидят,

по крайней мере, два зайца.



Принцип Дирихле устанавливает связь между объектами и ящиками

Принцип Дирихле

Если в n клетках

сидит m голубей,

причем $m < n$,

то хотя бы в одна клетка

останется свободной.

Обобщенный принцип Дирихле

Если 3 клетки и 4 кролика, то в одной хотя бы в одной клетке……

2 кролика

Если 3 клетки и 11 кроликов, то в одной хотя бы в одной клетке….

4 кролика, т.к. $11=3\cdot3+2$

Если 3 клетки и 19 кроликов, то в одной хотя бы в одной клетке……

7 кроликов, т.к. $19=3\cdot6+1$

Если 5 клеток и 42 кролика, то в одной хотя бы в одной клетке……

9 кроликов, т.к. $42=3\cdot8+2$

Если n клеток и $n\cdot k+1$ кроликов, то хотя бы в одной клетке…..

$K+1$ кролик

На каких задачах применять принцип Дирихле?

В задаче 2 величины

Доказать, что никакие
2 объекта не могут
обладать какими-то
условиями

Надо доказать, что найдутся хотя бы два объекта….

В задаче есть неопределенность

В классе 35 учеников. Можно ли утверждать, что среди них найдутся хотя бы два ученика, фамилии которых начинаются с одной буквы?

В тире стреляли в квадрат 5×5, и произвели 24 выстрела.
Найдётся ли в этой фигуре квадрат 1×1, в котором нет дырки от пули?

Решение.
Всего без наложений квадрат 5×5 можно покрыть 25 квадратиками 1×1. Возьмём за "клетки" квадратики 1×1 (их 25), а за "кроликов" -выстрелы (их 24). Применяя формулу раскраски получим, что по крайней мере одна из "клеток" будет свободна. А это и значит, что найдётся квадратик 1×1, в котором нет дырки от пули.

Вывод.

Таким образом, применяя данный метод, надо:

1. определить, что удобно в задаче принять за “клетки”, а что за “зайцев”;
2. получить “клетки”; чаще всего “клеток” меньше (больше), чем “зайцев” на одну (или более);
3. выбрать для решения требуемую формулировку принципа Дирихле;

В городе Санкт- Петербурге живет более 5 миллионов человек. Докажите, что у каких-то двух из них одинаковое число волос на голове, если известно, что у любого человека на голове менее миллиона волос.

Решение:
«клетки»- количество волос: 0 волос, 1 волос, 2 волоса……..1000000 волос
«кролики- люди.
Т.к. кроликов больше, чем клеток, то по принципу Дирихле найдется клетка, где 2 кролика.

Условие
В клетках таблицы 3×3 расставлены числа –1, 0, 1.
Докажите, что какие-то две из восьми сумм по всем строкам, всем столбцам и двум главным диагоналям будут равны.

Решение
Эти суммы могут принимать лишь семь разных значений: от –3 до 3.

-1	-1	-1
1	0	1
1	1	1

-1 -1 -1
1 1 1
0 0 0
-1 1 0
-1 -1 0
-1 1 1

Имеется 25 конфет 3 сортов. Верно ли, что не менее 9 из них будут какого-то одного сорта?

Решение: Пусть «клетки» - сорта конфет «кролики» - конфеты. Тогда по обобщенному принципу Дирихле в каждой клетке будет по 8 «кроликов» ($8 \cdot 3+1=25$) и ещё один останется, т.е. его надо посадить будет в какую-то «клетку». Но тогда в этой «клетке» будет 9 «кроликов»,т.е. 9 конфет одного сорта

10 школьников на олимпиаде решили 35 задач, причем известно, что среди них есть школьники, решившие ровно одну задачу, школьники, решившие ровно две задачи и школьники, решившие ровно три задачи. Докажите, что есть школьник, решивший не менее пяти задач.

Решение

Из условий следует, что найдутся 7 школьников, решивших $35 - 6 = 29$ задач.

Пусть клетки – школьники

Кролики- задачи.

Так как $29 = 4 \cdot 7 + 1$, то по обобщённому принципу Дирихле найдется школьник, решивший не менее пяти задач.

В квадратном ковре со стороной 1 м моль проела 51 дырку (дырка — точка). Докажите, что некоторой квадратной заплаткой со стороной 20 см можно закрыть не менее трёх дырок.

Решение: Весь ковер можно накрыть такими 25-ю заплатами.
Клетки- заплаты.
Кролики- дырки. Т.к. $51=25\cdot 2+1$, то по обобщенному принципу Дирихле какая-то из этих заплат накроет не менее трех дырок.

Докажите, что найдутся двадцать москвичей, имеющие одинаковое число волос на голове. (Известно, что у человека на голове не более 400000 волос, а в Москве не менее 8 миллионов жителей.)

Решение

Всех москвичей разделим на 400001 группу. В первую группу отнесем тех, у кого на голове 0 волос, во вторую - тех, у кого на голове ровно 1 волос, и т.д., в 400001-ую - тех, у кого на голове ровно 400000 волос. Нам нужно доказать, что в какой-то из этих групп не менее 20 человек. Предположим противное, в каждой из этих групп не более 19 человек. Но тогда всего жителей в Москве не более, чем 19*400001, что меньше, чем 8 миллионов. Мы получили противоречие условию, показывающее, что 20 москвичей с одинаковым числом волос обязательно найдутся.

В классе 30 человек. Паша сделал 13 ошибок, а остальные меньше. Доказать, что какие-то три ученика сделали одинаковое количество ошибок.

Решение: По условию задачи, наибольшее число ошибок, сделанных в работе 13. Значит, ученики могли сделать 0, 1, 2, ..., 13 ошибок. Эти варианты будут «клетками», а ученики станут «кроликами». Тогда по (обобщенному) принципу Дирихле (14 клеток и 30 зайцев) найдутся три ученика, попавших в одну «клетку», то есть сделавших одинаковое число ошибок.

Дано 8 различных натуральных чисел, не больших 15. Докажите, что среди их положительных попарных разностей есть три одинаковых.

Решение

Различных разностей может быть 14 - от 1 до 14 - это те 14 клеток, в которые мы будем сажать кроликов. Кто же будет нашими кроликами? Ими, конечно, должны быть разности между парами данных нам натуральных чисел. Однако имеется 28 пар и их можно рассадить по 14 клеткам так, что в каждой клетке будет сидеть ровно два "кролика" (и значит, в каждой меньше трех). Здесь надо использовать дополнительное соображение: в клетке с номером 14 может сидеть не более одного кролика, ведь число 14 можно записать как разность двух натуральных чисел, не превосходящих 15, лишь одним способом: 14 = 15 - 1. Значит, в оставшихся 13 клетках сидят не менее 27 кроликов, и применение обобщенного принципа Дирихле дает нам желаемый результат.

В алфавите языка племени Ни-Бум-Бум 22 согласных и 11 гласных, причем словом в этом языке называется произвольное буквосочетание, в котором нет двух согласных подряд и ни одна буква не использована дважды. Алфавит разбили на 6 непустых групп. Докажите, что из всех букв одной из групп можно составить слово.

Решение

Заменим согласные буквы единицами, а гласные – минус единицами. Так как сумма всех полученных чисел равна 11, а групп шесть, то в одной из групп сумма не превосходит 1. Это значит, что гласных в ней достаточно, чтобы заполнить все промежутки между согласными.

Принцип Дирихле и метод от противного

На шахматной доске стоят 44 ферзя. Докажите, что каждый из них бьёт какого-нибудь другого ферзя.

Решение. Пусть какой-то из этих 44 ферзей не бьёт никакого другого ферзя. Тогда все клетки, которые находятся под боем этого ферзя, пусты. А так как при любом положении на шахматной доске ферзь бьёт не менее 21 поля, то занято ферзями не более $64 - 21 = 43$ полей. Противоречие.

Осенью отряд из 21 белки пополнял запасы и собрал 200 орехов. Докажите, что какие-то 2 белки собрали одинаковое число орехов.

Если у всех разное число орехов, то всего было бы собрано не меньше $0 + 1 + 2 + 3 + ... + 20 = 210$ орехов, что противоречит условию задачи.

Олимпиаду писали 70 школьников. Аркаша набрал 33 балла, остальные меньше. Докажите, что по крайней мере три школьника набрали одинаковое количество баллов.

Решение. Предположим, что не нашлось таких трёх школьников. Тогда одинаковое количество баллов (от 0 до 32) набрали не более двух школьников. Тогда школьников, не считая Аркаши, не более $33 \cdot 2 = 66$, а их 69. Противоречие.

В лесу растет миллион елок. Известно, что на каждой из них не более 600000 иголок. Докажите, что в лесу найдутся две елки с одинаковым числом иголок.

Имеется 101 пуговица, окрашенных в один из 11 цветов. Докажите, что либо среди этих пуговиц найдутся 11 пуговиц одного цвета, либо 11 пуговиц разных цветов.

Решение

Предположим, что среди данных пуговиц нет 11 пуговиц разных цветов. Тогда каждая пуговица окрашена в один из 10 цветов. Если пуговиц каждого цвета не более десяти, то всего пуговиц не более 100, и это противоречит условию. Таким образом, пуговиц какого-то одного цвета не менее 11, что и нужно было показать. Отметим, что утверждение задачи становится неверным в том случае, если изначально даны 100 пуговиц.

Обязательно ли среди двадцати пяти "медных" монет (т.е. монет достоинством 1, 2, 3, 5 коп.) найдётся семь монет одинакового достоинства?

Решение

Да, обязательно. Если бы монет каждого из четырех типов было не более 6, то всего монет было бы не более $6 \cdot 4 = 24$, а их 25.

Докажите, что в любой компании найдутся два человека, имеющие одинаковое число друзей (из этой компании).

Решение
Пусть в компании n человек. Тогда у каждого человека имеется от 0 до $n - 1$ друзей. Пусть клетки – это друзья,
Кролики- это люди. В каждой клетке покролику,т.е. есть человек, имеющий $n - 1$ друга, тогда он дружит со всеми, следовательно, нет человека, который имеет 0 друзей. Противоречие.

Задачи на знакомства, даты рождения

В доме живут 40 учеников. Существует ли такой месяц в году, когда хотя бы 4 ученика празднуют свой день рождения.

Решение. Пусть “коробками” будут месяцы, а “предметами” - ученики. Распределяем, “предметы” по “коробкам” в зависимости от месяца рождения. Так как число месяцев, то есть, “коробок”, равно 12, а число учеников, то есть, “предметов” $40 = 12 \cdot 3 + 4$, согласно принципу Дирихле существует “коробка” (месяц) с по крайней мере $3+1=4$ “предметами” (учениками).

В поход пошли 20 туристов. Самому старшему из них 35 лет, а самому младшему 20 лет. Верно ли, что среди туристов есть одногодки?

Решение

Чему может равняться возраст каждого из туристов? Очевидно, одному из чисел: 20, 21, 22, ..., 35 (всего 16 вариантов). Поэтому, если предположить, что возраст любых двух туристов различен, то в группе не больше 16 человек. Но по условию задачи их 20. Значит, в группе обязательно есть одногодки.

В школе 400 учеников. Докажите, что хотя бы двое из них родились в один день года.

Решение. Всего в году 365 дней. Назовём дни “коробками”, а учеников “кроликами”, тогда в некоторой коробке сидят не меньше двух “кроликов”. Значит хотя бы два ученика родились в один день.

В классе 34 ученика. Можно ли утверждать, что среди них найдутся хотя бы два ученика, фамилии которых начинаются с одной буквы?

Решение. В алфавите 33 буквы, значит “клеток” (число букв) больше, чем “зайцев” (число учеников), поэтому найдется хотя бы одна “клетка” в которой два “зайца”. Найдутся хотя бы два ученика фамилии которых начинаются с одной буквы.

Задачи на пары

Начнем с простой, на первый взгляд, очевидной задачи.

В танцевальном кружке 16 детей, девочек больше чем мальчиков. Доказать, что при исполнении вальса какие то две девочки будут танцевать вместе.

Решение. Число пар – число “клеток” их меньше 8, число девочек – число “кроликов”, их больше, чем 8. Так как, “кроликов” больше чем клеток, значит есть клетка в которой сидит не менее двух “кроликов”. Значит есть пара в которой танцуют две девочки, В классе мальчиков больше чем девочек. Доказать, что хотя бы за одной партой сидят два мальчика, если число учащихся в классе чётное и за каждой партой сидит два ученика.

Решение. Число занятых парт равно половине числа учащихся, будем считать, что число “кроликов” равно числу мальчиков, число клеток равно числу парт, “кроликов” больше чем “клеток”, значит есть “клетка” в которой сидит не менее двух “кроликов”. Значит есть парта за которой сидят два мальчика.

На территории МГУ припарковано 100 машин. Среди них — 30 чёрных, 20 синих и 20 белых мерседесов. Никакие два мерседеса разного цвета не стоят рядом. Докажите, что тогда какие-то три мерседеса, стоящие подряд — одного цвета.

Решение. На территории МГУ припарковано 70 мерседесов и 30 других машин. По условию, рядом с мерседесом может стоять либо мерседес того же цвета, либо «другая» машина. Чем больше мерседесов будут стоять парами (это клетки), тем меньше понадобится других машин (кроликов). Но пар мерседесов 35, и на их окружение понадобится 34 машины. Если мерседесы стоят не обязательно парами, то машин понадобится еще больше. Но «других», по условию, всего 30, значит поставить можно только 31 пару. Значит, рядом окажутся три одинаковых мерседеса.

Можно ли расставить на окружности числа 1, 2, ..., 12 так, чтобы разность между двумя рядом стоящими числами была 3, 4 или 5?

Решение. Заметим, что числа 1, 2, 3, 10, 11, 12 не могут стоять рядом. Так как всего двенадцать позиций, то эти числа должны стоять через один (иначе по принципу Дирихле какие-то два из этих чисел будут стоять рядом). Осталось заметить, что число 4 должно соседствовать с двумя числами из стоящих через один, а оно может соседствовать только с числом 1.

Ответ: нет.

В классе 25 человек. Известно, что среди любых трех из них есть двое друзей. Докажите, что есть ученик, у которого не менее 12 друзей.

Решение. Рассмотрим двоих учеников класса, которые не дружат между собой. (Если таких нет, то все ученики класса дружат между собой, значит, у каждого ученика имеется 24 друга, и задача решена.) Пусть этими двумя будут Вася и Петя. Тогда из оставшихся 23 учеников каждый дружит либо с Васей, либо с Петей. Действительно, если бы кто-то (скажем, Коля) не дружил бы ни с Васей, ни с Петей, то мы имели бы троих учеников, среди которых не было бы друзей. Теперь если предположить, что и Вася, и Петя имеют не более 11 друзей, то всего в классе, кроме этих двоих было бы не больше 22 человек. Полученное противоречие показывает, что один из школьников имеет не менее 12 друзей.

За круглым столом сидят 100 человек, причем более половины из них - рыцари. Доказать, что какие-то два рыцаря сидят напротив друг друга

Решение. Будем считать “кроликами” рыцарей, а “клетками” - пары диаметрально противоположных мест за столом. “Клеток” тогда ровно половина от числа мест за столом (т.е. 50), а “кроликов” - строго больше. Тогда есть “клетка”, в которой сидит не менее двух “кроликов”, т.е. пара противоположных мест, за которыми сидят два рыцаря. Они и есть искомые.

На планете в звездой системе Тау Кита суша занимает больше половины площади. Доказать, что таукитяне смогут прорыть прямой туннель через центр планеты так, чтобы он соединял сушу с сушей

Решение. Будем считать “кроликами” точки суши, а клетками - пары диаметрально противоположных точек планеты. Количество “кроликов” в данном случае - это площадь суши, а количество “клеток” - *половина* площади планеты. Поскольку площадь суши больше половины площади планеты, то "кроликов” больше, чем “клеток". Тогда есть клетка, в которой сидит не менее двух “кроликов”, т.е. пара противоположных точек, обе из которых - суша.
Эти точки и надо соединить туннелем.

На складе имеется по 200 сапог 41, 42 и 43 размеров, причём среди этих 600 сапог 300 левых и 300 правых. Докажите, что из них можно составить не менее 100 годных пар обуви.

Решение

В каждом размере каких-то сапог меньше: правых или левых. Выпишем эти типы сапог по размерам. Какой-то тип, например, левый, повторится по крайней мере дважды, например, в 41 и 42 размерах. Но так как количество левых сапог в этих размерах суммарно не меньше 100 (левых сапог 43-го размера не больше 200), то мы имеем не менее 100 годных пар обуви в этих размерах.