Принцип крайнего.

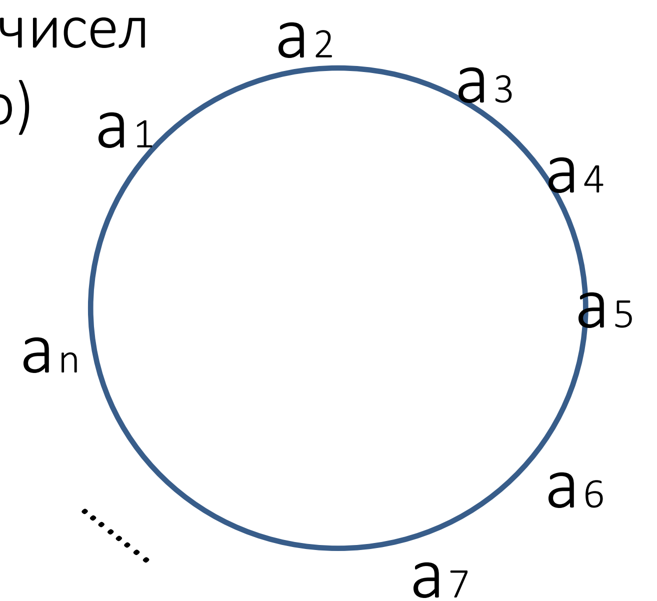
Для решения многих задач бывает полезно рассмотреть какой-либо «крайний», «граничный» элемент, т. е. элемент, на котором некоторая величина принимает наибольшее или наименьшее значение, например, наибольшую или наименьшую сторону треугольника, наибольший или наименьший угол и т. д. Этот метод решения задач иногда называют ***принципом*** (***правилом***) ***крайнего***; название это, правда, не общепринятое.

Идея №1: в качестве крайнего элемента взять наибольший или наименьший элемент

$\boxed{1}$ По кругу выписано несколько натуральных чисел, каждое из которых не превосходит одного из соседних с ним. Докажите, что среди этих чисел точно есть хотя бы два равных.

Рассмотрим наибольшее из этих чисел (или одно из них, если их несколько)

Пусть это будет a_1.



$$a_1 \geq a_2 \ldots\ldots \geq a_n.$$

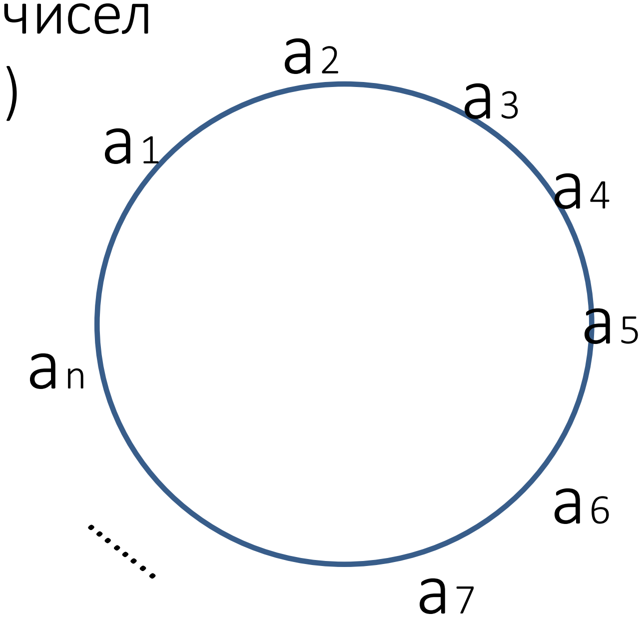
$$a_1 \leq a_2 \quad или \quad a_1 \leq a_n$$

Т.е. оно совпадает либо с a_1 или с a_n

2 По кругу выписано несколько чисел, каждое из которых равно среднему арифметическому двух соседних с ним. Докажите, что все эти числа равны.

Рассмотрим наибольшее из этих чисел (или одно из них если их несколько)

Пусть это будет a_1.



$$a_1 \geq a_2 ..... \geq a_n.$$

$$a_1 = \frac{a_2 + a_n}{2}$$

Если a_2 или a_n меньше a_1, то равенство не достигается

Значит все три числа равны. И т.д.

По окружности записаны 30 чисел. Каждое из этих чисел равно модулю разности двух чисел, стоящих после него по часовой стрелке. Сумма всех чисел равна 1. Найти эти числа.

Поскольку каждое из выписанных чисел равно модулю какого-то числа, то все они должны быть неотрицательны. Пусть наибольшее из них равно M.

Два следующих за ним числа должны быть не больше M и различаться на M.

Это возможно лишь в случае, когда одно из них равно M, а другое – нулю.

Итак, в каком-то месте должны стоять либо числа M, M, 0, либо числа M, 0, M.

Двигаясь по окружности против часовой стрелки, мы однозначно восстановим остальные числа. В обоих случаях получается один и тот же набор – M, M, 0, ..., M, M, 0.

Из условия, что сумма всех чисел равна 1, находим M = $^1/_{20}$.

Идея №2: взять и упорядочить

3 8 грибников собрали 37 грибов. Известно, что никакие двое не собрали грибов поровну и каждый нашёл хотя бы один гриб. Докажите, что какие-то двое из них собрали больше, чем какие-то пятеро.

Пронумеруем грибников так, чтобы 1-ый набрал больше всех. 2-ой- больше среди оставшихся и т.д.

Ясно, что первый не мог собрать меньше, чем 9 грибов

Почему? Тогда 1+2+...+8=36

Аналогично 2-ой меньше -7

Значит 1-ый и 2-ой собрали не меньше 7+9=16 грибов

Третий собрал не меньше 6 грибов.

Значит 4-ый, 5-ый, ..., 8-ой набрали максимум 37-16-6 =15 грибов, а это меньше, чем 16. Ч.Т.Д.

Докажите, что за одним из астероидов никто не наблюдает.

7 Петя задумал четыре неотрицательных числа и посчитал их всевозможные попарные суммы (всего 6 штук). Какие числа он задумал, если эти суммы — 1, 2, 3, 4, 5, 6?

Пуст ь Гоша задумал числа $a \geq b \geq c \geq d \geq 0$. Все суммы различны,

поэт ому самая маленькая из посчит анных сумм — $c + d$, следующая за ней — $d + b$, т акж е самая большая — $a + b$, а следующая за ней — $a + c$.

Значит , $c + d = 1$, $d + b = 2$, $a + b = 6$, $a + c = 5$.

Тогда $c = 1 - d$, $b - c = 1$, $b = c + 1 = 2 - d$, $a = 5 - c = 4 + d$.

Замет им, чт о $a + d = 4 + 2d$ и $b + c = 3 - 2d$ ест ь числа 3 и 4 в некот ором порядке.

Число d неот рицат ельно, значит , $a + d \geq 4$ и $b + c \leq 3$, значит , $d = 0$,т огда $c = 1$, $b = 2$, $a = 4$.

Идея №3: рассмотреть определенное место, определенную строку (столбец)

4 На шахматной доске стоят несколько ладей. Обязательно ли найдется ладья, бьющая не более двух других? (Перепрыгивать через другие фигуры ладья не может.)

Рассмотрим самую верхнюю ладью, если таких несколько, то самую левую

Тогда выше и левее нет ладей, значит она бьёт не более двух
(по горизонтали правее или по вертикали вниз)

На полях доски 8×8 расставлены числа 1, 2, ..., 64. Докажите, что найдется пара соседних по стороне клеток, числа в которых отличаются не менее чем на 5.

Рассмотри строку, где стоит число 1 и столбец, где 64.

Мы можем, двигаясь сначала по строке, а потом по столбцу, пройти от клетки, в которой написано число 1, к клетке, в которой написано число 64, причём наш путь будет состоять не более, чем из 14 ходов (ходом мы называем переход из любой клетки в соседнюю).

Предположим, что разность между каждыми двумя соседними числами в таблице меньше 5.

Тогда за 14 или меньшее число ходов, которые мы сделали при переходе от 1 к 64, к исходному числу 1 прибавится не более чем $14 \times 4 = 56$.

Между тем $64 - 1 = 63$. Противоречие.

Идея №3: цепочку рассуждений можно начинать с края,
С какого то момента, с конца

других. (Перепрыгивать через другие фигуры ладья не может.)

5 В стране есть несколько городов. Сумасшедший путешественник едет из города A в самый далёкий от него город B. Затем едет в самый далёкий от B город C и т.д. Докажите, что если город C не совпадает с городом A, то путешественник никогда не вернётся обратно в город A.

Предположим, что на втором шаге путешественник не возвратился в А, т.е. город С отличен от города А. Тогда маршрут от А до В короче маршрута из В в С (поскольку С — наиболее удаленный от В город).

В дальнейшем каждый следующий маршрут будет не короче предыдущего, так как каждый раз мы в качестве следующего пункта назначения выбираем наиболее удаленный город.

Пусть на некотором шаге путешественник все же вернулся в город А, выйдя из некоторого города Х

. По доказанному, маршрут от Х до А длиннее маршрута от А до В, а это противоречит тому, что В — наиболее удаленный от А город.

6 В космическом пространстве летают 2011 астероидов, на каждом из которых сидит астроном. Все расстояния между астероидами различны. Каждый астроном наблюдает за ближайшим астероидом. Докажите, что за одним из астероидов никто не наблюдает.

Рассмотрим два астероида *A* и *B*, расстояние между которыми наименьшее.

Астроном на астероиде *A* смотрит на астероид *B*, а астроном на астероиде *B* смотрит на астероид *A*.

Если найдется астроном, который смотрит, например на А, то это значит, что расстояние между ним и А – ближайшее, т.е. оно меньше или равно АВ, но все расстояния различны и АВ-наименьшее из всех расстояний. Значит на А, В никто не смотрит

Теперь исключим из рассмотрения астероиды *A* и *B*. Получим систему из 2011 – 2=2009 астероидов, для которых очевидно выполняется условие задачи.

Продолжая так далее, придем к случаю трех астероидов. Выбрав, среди них два, расстояние между которыми наименьшее получим, что на оставшийся астероид никто не смотрит.

На шахматной доске расставлены 8 ладей так, что они не бьют друг друга.
Докажите, что на полях чёрного цвета расположено чётное число ладей.

Подсказка
Введите координаты на шахматной доске и подсчитайте сумму координат всех ладей.

Пронумеруем все вертикали, начиная с самой левой, и все горизонтали, начиная с самой нижней, числами от 1 до 8. Тем самым каждой ладье приписывается пара "координат". Сумму этих координат назовем ***весом*** ладьи.

На каждой вертикали и на каждой горизонтали стоит по одной ладье (поскольку ладьи не бьют друг друга), поэтому сумма S координат всех ладей равна $2 \cdot (1 + 2 + \ldots + 8)$, то есть чётна.

С другой стороны, чтобы вычислить сумму S, нужно просуммировать веса всех ладей.

Однако вес ладьи, стоящей на чёрной клетке, чётен, а вес ладьи, стоящей на белой клетке, нечётен.

Поскольку S чётно, то количество нечётных слагаемых-весов чётно, то есть число ладей на чёрных полях чётно.

Принцип крайнего в геомет рии

Наименьшая или наибольшая сторона

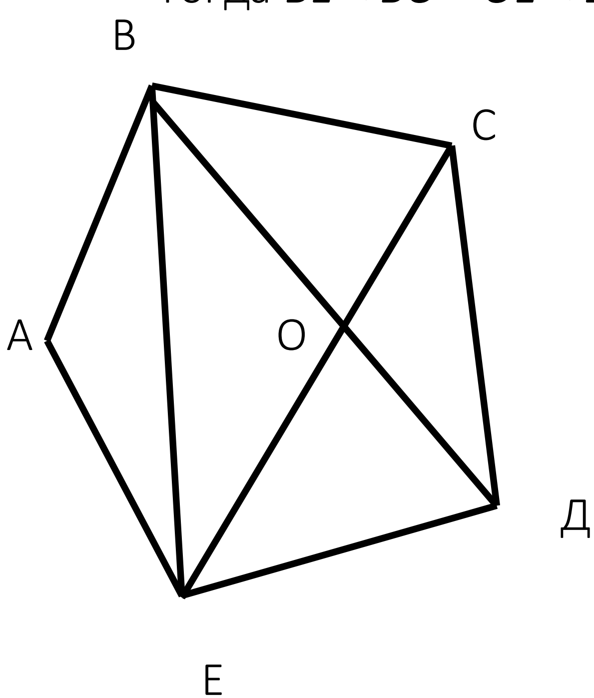
Докажите, что в любом выпуклом пятиугольнике найдутся три диагонали, из которых можно составить треугольник.

Пусть BE — наибольшая диагональ пятиугольника $ABCDE$. Докажем, что тогда из отрезков BE, EC и BD можно составить треугольник.

Для этого достаточно проверить, что $BE < EC + BD$

Пусть точка О- точка пересечения диагоналей ЕС и ВД.

Тогда $BE < BO + OE < BD + EC$.



Идея: наименьший или наибольший угол

Полезно помнит ь:

наименьший угол т реугольника не больше 60°

Наибольший угол не меньше 60°

Наименьшее из n чисел не превосходит их среднего арифметического!

Докажите, что если длины всех сторон треугольника меньше 1, то его площадь меньше $\frac{\sqrt{3}}{4}$

Рассмот рим наименьший угол т реугольника. Тогда он меньше или равен 60°

и площадь треугольника оценивается следующим образом

$$S = \frac{1}{2} AC \cdot AB \cdot \sin A < \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

Внутри круга радиуса 1 лежат восемь точек. Докажите, что расстояние между некоторыми двумя из них меньше 1.

По крайней мере семь точек отличны от центра *O* окружности.

.

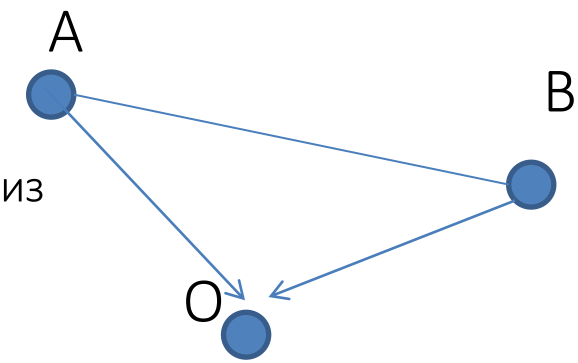
Значит наименьший из углов AiOAj не превосходит 360°/7

Пусть точки A и B – это точки, которые соответствуют наименьшему углу.

Тогда в треугольнике AOB: AO меньше 1
BO меньше 1 и угол AOB не может быть большим углом,
т.е. AB не большая сторона, т.е. AB меньше 1

В некоторой стране 100 аэродромов, причем все попарные расстояния между ними различны. С каждого аэродрома поднимается самолет и летит на ближайший к нему аэродром. Докажите, что ни на один аэродром не может прилететь больше пяти самолетов.

Если самолеты из точек *A* и *B* прилетели в точку *O*, то *AB* — наибольшая сторона треугольника *AOB*,



Угол АОВ – наибольший, т.е. он больше 60°

Предположим, что в точку прилетели самолеты из A1, A2,…An

Тогда меньший из этих углов не превосходит 360°/n>60°.

Ответ: 5

Наименьшее или наибольшее расстояние

На плоскости расположено несколько точек, все попарные расстояния между которыми различны. Каждую из этих точек соединяют с ближайшей. Может ли при этом получиться замкнутая ломаная?

Предположим, что получилась замкнутая ломаная.

Пусть AB — наибольшее звено этой ломаной, а AC и BD — соседние с ним звенья.

Тогда $AC < AB$, т. е. B — не ближайшая к A точка, и $BD < AB$, т. е. A — не ближайшая к B точка.

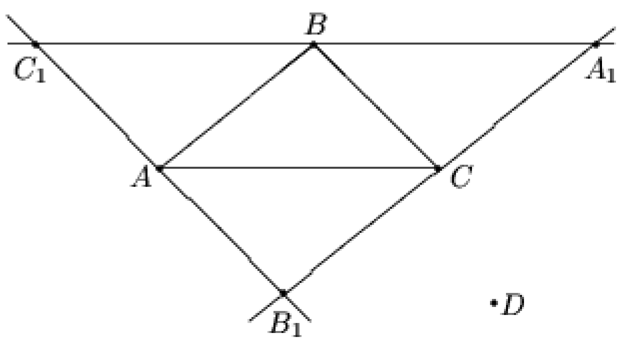
Поэтому точки A и B не могут быть соединены. Получено противоречие.

Наибольшая или наименьшая площадь

На плоскости расположено n точек, причем площадь любого треугольника с вершинами в этих точках не превосходит 1. Докажите, что все эти точки можно поместить в треугольник площади 4.

Рассмотрим треугольник максимальной площади с вершинами в данных точках. Пусть это будет треугольник ABC.

Проведем через вершины прямые параллельные его сторонам



Площадь этого треугольника в 4 раза больше площади треугольника ABC, следовательно она не превосходит 4. Покажем, что каждая данная точка находится в треугольнике $A_1B_1C_1$. Предположим противное. Тогда существует точка D из данного множества, находящаяся с некоторой вершиной треугольника $A_1B_1C_1$ по разные стороны относительно стороны, противолежащей этой вершине. Пусть, например C_1 и D находятся по разные стороны относительно стороны B_1A_1. Тогда расстояние от точки D до AB больше, чем расстояние от точки C до AB. Следовательно площадь треугольника ABD больше площади треугольника ABC, что противоречит выбору треугольника ABC.

Задачи для самостоятельного решения

1. На листке написаны несколько натуральных чисел. Известно, что для любых двух найдется на листке число, которое на каждое из них делится. Докажите, что на листке найдется число, которое делится на все числа.
2. Имеется 100 различных чисел. Докажите, что среди них можно выбрать пять чисел так, что их среднее арифметическое не будет равно среднему арифметическому никаких шести из исходных чисел.
3. На шахматной доске стоят ладьи. Докажите, что среди них есть такая, которая бьет не более двух других.
4. На шахматной доске стоят слоны. Докажите, что среди них есть такой, который бьет не более двух других.
5. Верно ли такое же утверждение для коней?

На шахматной доске стоит несколько ферзей. Обязательно ли найдется фигура, бьющая не более двух других?